Riccatische Differentialgleichung

Beweisen Sie: Ist die Funktion $y = y(x)$ im Intervall (a, b) eine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung

$$y' = f_0(x)y^2 + 2f_1(x)y + f_2(x),$$

so ist die Funktion $u = u(x)$ mit

$$u(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} f_0(t)y(t)\,dt\right), \quad x, x_0 \in (a, b)$$

eine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$f_0(x)u'' - \big(f_0'(x) + 2f_0(x)f_1(x)\big)\,u' + f_0^2(x)f_2(x)u = 0.$$

Ist umgekehrt $u = u(x)$ eine nicht verschwindende Lösung dieser Differentialgleichung, dann ist $z = -u'/(f_0(x)u)$ eine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung. (f_0 sei in (a, b) stetig differenzierbar mit $f_0(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$.